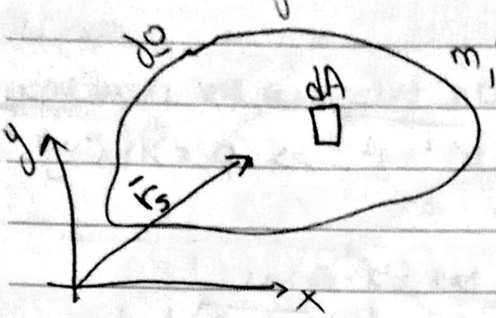
16/05/2019

Μάθημα 17ο

Κέντρο Μάζας (Συνεχής Περίπτωση)



$$\bar{r}_s = \frac{\iint_\Omega \bar{r}\,\rho(\bar{r})\,dA}{\iint_\Omega \rho(\bar{r})\,dA}$$

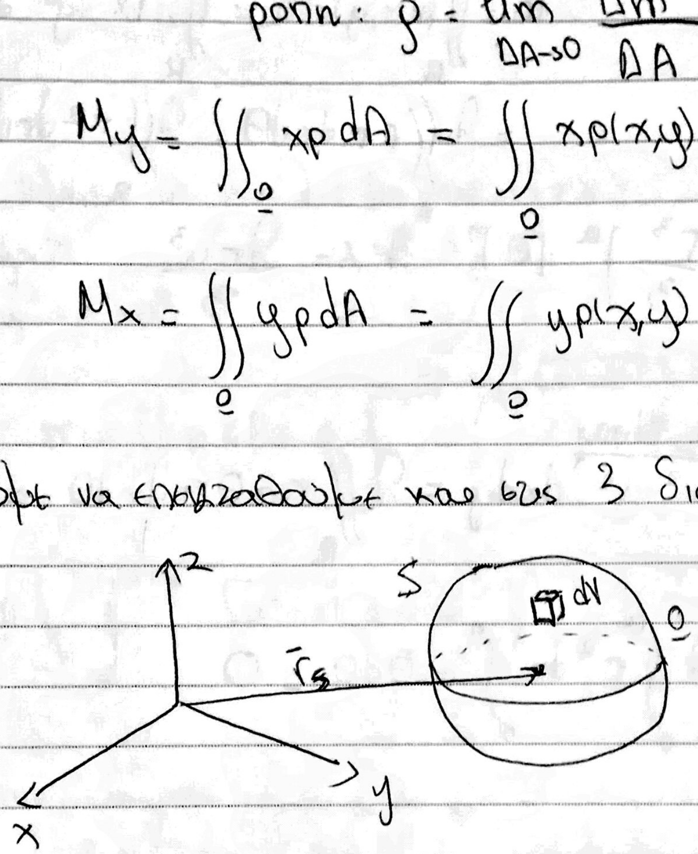
ροπή: $\rho = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta A}$ Τότε $\rho = \rho(\bar{r})$, βαθμωτή

Δηλ: $M_y = \iint_\Omega x\rho\, dA = \iint_\Omega x\rho(x,y)\,dx\,dy$

ενώ: $M_x = \iint_\Omega y\rho\, dA = \iint_\Omega y\rho(x,y)\,dx\,dy$.

Μπορούμε να επεκταθούμε και στις 3 διαστάσεις

π.χ.



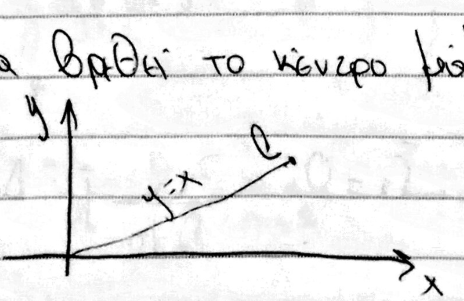
$dV = dx\,dy\,dz$

$$\bar{r}_s = \frac{\iiint_\Omega \bar{r}\,\rho(\bar{r})\,dV}{\iiint \rho(\bar{r})\,dV} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{r}_s = \frac{\iiint_\Omega x\rho(\bar{r})\,dV\,\bar{i} + \iiint_\Omega y\rho(\bar{r})\,dV\,\bar{j} + \iiint_\Omega z\rho(\bar{r})\,dV\,\bar{k}}{m}$$

Παρατήρηση: Αν το σώμα είναι "μονοδιάστατο" τότε τα ολοκληρώματα ανάγονται σε επικαμπύλια.

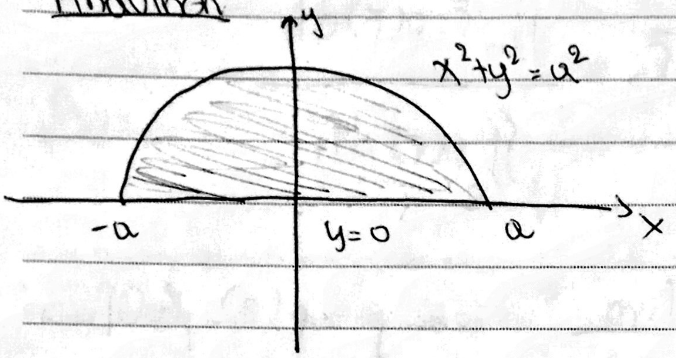
π.χ: Να βρεθεί το κέντρο μάζας του σώματος:



$$\bar{r}_s = \frac{\oint_\ell x\rho\,dl\,\bar{i} + \oint_\ell y\rho\,dl\,\bar{j}}{\oint_\ell \rho\,dl} = \frac{\int_\ell \bar{r}\rho\,dl}{m}$$

Παράδειγμα: Η πυκνότητα ρ, λεπτού ημικυκλικού ελάσματος είναι ανάλογη της απόστασης από το κέντρο του. Να βρεθεί το Κ.Μ του

Απάντηση:



Πρώτα θα εκφράσω την πυκνότητα:

$$\rho \propto \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \rho = \lambda\sqrt{x^2+y^2}$$

Η μάζα του θα είναι:

$$m = \iint_R \rho(x,y)\,dA = \iint_R \lambda\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy =$$

$$= \lambda\iint_R r\cdot r\,dr\,d\theta = \lambda\iint_R r^2\,dr\,d\theta =$$

$$= \lambda\int_0^a r^2\,dr\int_0^\pi d\theta = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a\cdot[\theta]_0^\pi\cdot\lambda = \frac{\lambda\pi a^3}{3}$$

Η ροπή στον y-άξονα είναι:

$$M_y = \iint_R x\rho\,dA = \lambda\iint_R x\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \lambda\iint_R r\cos\theta\,dr\,d\theta =$$

$$= \lambda\iint_R r^3\cos\theta\,dr\,d\theta = \lambda\int_0^a r^3\,dr\int_0^\pi \cos\theta\,d\theta = 0$$

Άρα: $\bar{x} = \dfrac{0}{\frac{\lambda\pi a^3}{3}} = 0$

Η ροπή στον άξονα x είναι:

$$M_x = \iint_R y\rho\,dA = \lambda\iint_R y\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \lambda\iint_R r\sin\theta\, r\cdot r\,dr\,d\theta =$$

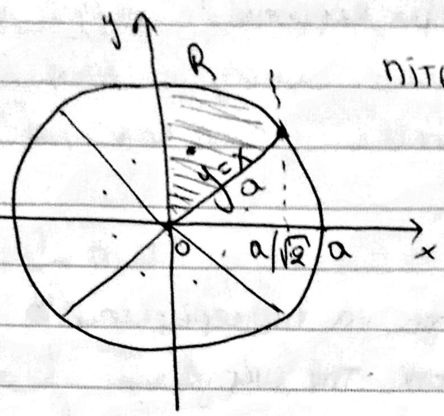
$$= \lambda\iint_R r^3\cdot\sin\theta\,dr\,d\theta = \frac{a^4}{2}\lambda$$

Άρα: $\bar{y} = \dfrac{3a}{2\pi}$ Και: $\bar{r}_s = 0\,i + \dfrac{3a}{2\pi}\,j$ Δ.Θ.Κ.Μ.

Παράδειγμα

Να βρεθεί το ΚΜ (κεντροειδές σαν πυκνότητα ρ=σταθερή) ενός κομματιού πίτσας.

Απάντηση



πίτσα χωρισμένη σε 8 κομμάτια.

Ο γεωμετρικός τόπος των ΚΜ των υπολοίπων κομματιών είναι κύκλος

σημεία τομής του κύκλου με την $y=x$:

$$\left.\begin{cases} y=x \\ y^2+x^2=a^2 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} y&=\pm a/\sqrt{2} \\ x&=\pm a/\sqrt{2} \end{aligned}$$

Μάζα:

$$m=\iint_R \rho\, dA = \rho\int_0^{a/\sqrt{2}}\int_{y=x}^{y=\sqrt{a^2-x^2}} dy\,dx = \rho\int_0^{a/\sqrt{2}}\left(\sqrt{a^2-x^2}-x\right)dx =$$

$$= \rho\left(\int_0^{a/\sqrt{2}}\sqrt{a^2-x^2}\,dx - \int_0^{a/\sqrt{2}} x\,dx\right) = \rho\frac{\pi a^2}{8} \Rightarrow \boxed{m=\rho\,\frac{\pi a^2}{8}}$$

Ροπές στους άξονες:

- $M_y = \iint_R x\rho\, dx\,dy = \rho\int_0^{a/\sqrt{2}}\int_x^{\sqrt{a^2-x^2}} x\,dy\,dx = \rho\,\dfrac{a^3(2-\sqrt{2})}{6}$

$$\bar{x} = \frac{\rho\,\frac{a^3(2-\sqrt{2})}{6}}{\rho\frac{\pi a^2}{8}} = \frac{4(2-\sqrt{2})}{3\pi}a$$

- $M_x = \iint_R y\rho\, dx\,dy = \rho\int_0^{a/\sqrt{2}}\int_x^{\sqrt{a^2-x^2}} y\,dy\,dx = \rho\,\dfrac{a^3}{3\sqrt{2}}$

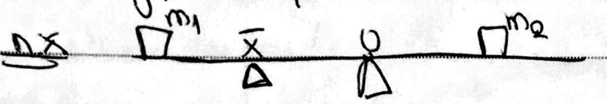
$$\bar{y} = \frac{\rho\,\frac{a^3}{3\sqrt{2}}}{\rho\,\frac{\pi a^2}{8}} = \frac{8}{3\sqrt{2}\pi}a.$$

Άρα $\vec{r}_s = \dfrac{4(2-\sqrt{2})}{3\pi}a\,\hat{i} + \dfrac{8}{3\sqrt{2}\pi}a\,\hat{j}$

Ροπές Αδράνειας

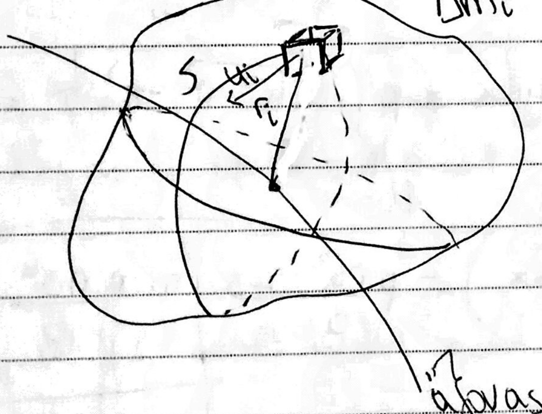
① Οι ροπές M_y, M_x δίνουν πληροφορία για το ΚΜ. του συστήματος σημείων (υπό την προϋπόθεση ότι το σύστημα ισορροπεί)

② Τι γίνεται όμως όταν δεν ισορροπεί;



α) Πόση ενέργεια χρειαζόμαστε για να περιστρέψουμε το σύστημα;
β) Μπορούμε να αποθηκεύσουμε από την ενέργεια;

Έστω ένα σώμα το οποίο δεν ισορροπεί, αλλά περιστρέφεται γύρω από άξονα περιστροφής



Η Δmi απέχει από τον άξονα περιστροφής απόσταση ri και περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$

Κ.Ε: $E = \frac{1}{2}mu^2$

Άρα η ταχύτητα του ΚΜ της στοιχειώδους μάζας Δmi είναι $u = \frac{dS}{dt}$, S: το τόξο που διανύθηκε

Άρα $u_i = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(r_i\theta) = r_i\frac{d\theta}{dt} = r_i\dot{\theta} = r_i\omega$

Η ενέργεια της μάζας Δmi λόγω περιστροφής (κινητικής ενέργειας)

$$\Delta E_i = \frac{1}{2}\Delta m_i u_i^2 = \frac{1}{2}\Delta m_i (r_i\omega)^2 = \frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2\omega^2$$

Αθροίζοντας για όλες τις στοιχειώδεις μάζες:

$$E = \frac{1}{2}\omega^2\int r^2\,dm = \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Ορίζουμε την ποσότητα $I = \int r^2\, dm$, ροπή αδράνειας ή 2η ροπή

<u>Φυσική Ερμηνεία:</u>

Η ροπή αδράνειας σχετίζεται με τη μάζα που λέει και πως είναι κατανεμημένη η μάζα.

$$\left.\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} m u^2 \\ E_k &= \frac{1}{2} I \omega^2 \end{aligned}\right\}$$

Η ροπή αδράνειας είναι το "περιστροφικό" ανάλογο της μάζας. Εμπεριέχει την πληροφορία της μάζας αλλά και το πως αυτή είναι κατανεμημένη.

<u>Ορισμός:</u> Ροπής Αδράνειας ή Δεύτερης ροπής:

x-άξονας: $I_x = \iint_R y^2 \rho(x,y)\, dA$, $M_x = \iint_R y\rho\, dA$

y-άξονας: $I_y = \iint_R x^2 \rho(x,y)\, dA$, $M_y = \iint_R x\rho\, dA$

ως προς την αρχή των αξόνων ορίζουμε την πολική ροπή:

$I_0 = \iint_R (x^2+y^2)\rho(x,y)\, dA = I_x + I_y$ ← καλείται και θεώρημα των κάθετων αξόνων

Γενικότερα η ως προς ευθεία L:

$I_L = \iint_R r^2(x,y)\rho(x,y)\, dA$ όπου $r(x,y)$ είναι η απόσταση του (x,y) από την L.

Ορισμός: Ακτίνες Αδράνειας:

$$\left.\begin{aligned} I_x &= m R_x^2 \\ I_y &= m R_y^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} R_x &= \sqrt{\frac{I_x}{m}} \\ R_y &= \sqrt{\frac{I_y}{m}} \end{aligned}\right.$$

Ορισμός (Ακτίνας Αδράνειας): μας δίνει σε πόση απόσταση από τους άξονες ($R_x \to x$, $R_y \to y$) θα μπορούσαμε να συγκεντρώσουμε την συνολική μάζα του αντικειμένου ώστε να έχουμε την ίδια ροπή αδράνειας.

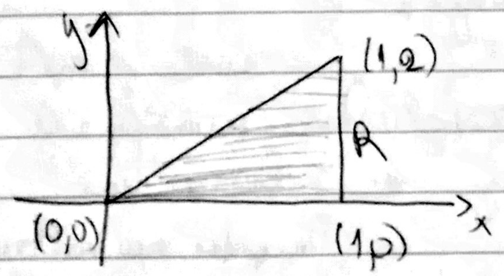
Δηλαδή αντιστοιχίζω το σώμα σε ένα Υ.Σ.

- Υπολογίζοντας $M_x, M_y \to$ βρίσκω πρώτες ροπές $\to$ βρίσκω ΚΜ.
- Αν περιστρέφεται το σύστημα $\to$ δημιουργούνται ροπές αδράνειας I_x, I_y

Παράδειγμα:

Να βρεθεί το Κ.Μ. του τριγώνου με κορυφές $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$. Αν $\rho(x,y) = 6x + 6y + 6$. Να βρείτε τις ροπές αδράνειας I_x, I_y, I_o. Και ακτίνες αδράνειας.

Λύση



$$m = \iint_R \rho \, dA = \int_0^1 \int_0^{y=2x} (6x + 6y + 6)\, dy\, dx =$$

$$= \int_0^1 \left[6xy + 3y^2 + 6y\right]_0^{2x} dx \Rightarrow \boxed{m = 14\ kg}$$

(SI = MKS)

Αδιαστατοποίηση $\rho = \frac{\rho}{\rho_0} - \left(\frac{kg}{m^3}\right)$

$$M_x = \iint_R y\rho \, dA = \int_0^1 \int_0^{2x} y(6x + 6y + 6)\, dy\, dx = \int_0^1 \left[3xy^2 + 2y^3 + 3y^2\right]_0^{2x} dx =$$

$= 11$

$$M_y = \iint_R x\rho \, dA = \int_0^1 \int_0^{2x} x(6x + 6y + 6)\, dy\, dx = 10$$

Άρα: ΚΜ: $\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$ | Άρα: $\bar{r}_0 = \frac{5}{7} i + \frac{11}{14} j$

$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{11}{14}$

Ροπές Αδράνειας:

$$I_x = \iint_R y^2 \rho \, dA = \int_0^1 \int_0^{2x} y^2 (6x+6y+6)\, dy\, dx = 12.$$

$$I_y = \iint_R x^2 \rho \, dA = \int_0^1 \int_0^{2x} x^2 (6x+6y+6)\, dy\, dx = 39/5$$

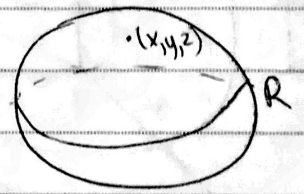
Άρα: $I_0 = I_x + I_y = 12 + \frac{39}{5} = \frac{99}{5}$

Ακτίνες Αδράνειας: $R_x = \sqrt{\frac{I_x}{m}} = \sqrt{\frac{12}{14}}$

$$R_y = \sqrt{\frac{I_y}{m}} = \sqrt{\frac{39/5}{14}}$$

Γενίκευση σε 3 διαστάσεις (3D)

$V = \iiint_R dV$, όγκος του R.



άρα $m = \iiint_R \rho(\bar{r})\, dV$, όπου $\rho = \rho(\bar{r})$ η πυκνότητα

$\rho = \rho(x,y,z)$ | $f = f(x,y)$

Ροπές

$M_{yz} = \iiint_R x\rho\, dV$, $M_{xz} = \iiint_R y\rho\, dV$, $M_{xy} = \iiint_R z\rho\, dV$

Κέντρο Μάζας:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

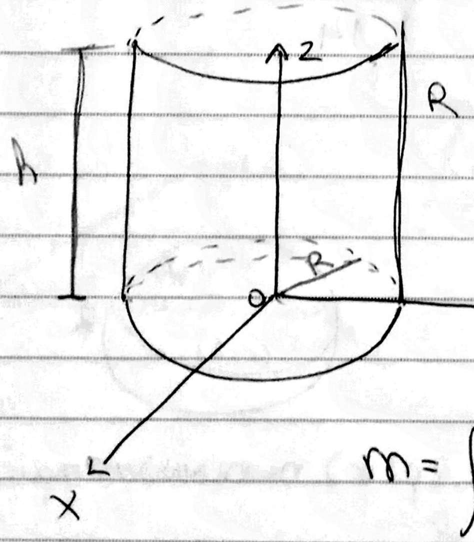
$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{\iiint_R x\rho\, dV}{\iiint_R \rho\, dV}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint_R y\rho\, dV}{\iiint_R \rho\, dV}, \quad \bar{z} = \frac{\iiint_R z\rho\, dV}{\iiint_R \rho\, dV}$$

Ροπές Αδράνειας:

$$I_x = \iiint_R (y^2+z^2)\rho\, dV, \quad I_y = \iiint_R (x^2+z^2)\rho\, dV, \quad I_z = \iiint_R (x^2+y^2)\rho\, dV$$

Άσκηση (2 από ασκ. στ. φυλ.)

m =; που περιέχ. V (ορθού κυκλικού κυλίνδρου, ακτίνας R, ύψους h) αν το ρ μεταβάλλεται ανάλογα με την απόσταση από την βάση



$$m = \iiint_R \rho\, dV$$

$\rho = \rho(z)$, δηλ. $\rho = kz$, k: σταθ.

αφού μεταβλ. ανάλογα

$$m = \iiint_V kz\, dx\,dy\,dz \xrightarrow{\text{κυλινδρικές συντ.}}$$

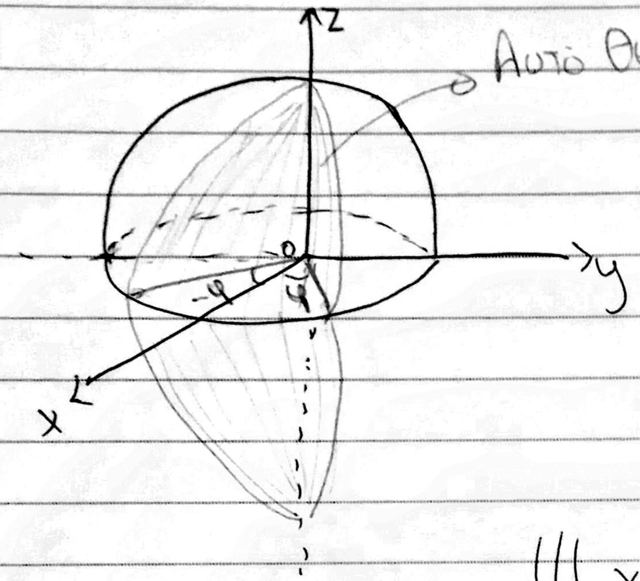
$$\Rightarrow m = 4k\int_0^{\pi/2}\int_0^R\int_0^h r\cdot z\, dz\,dr\,d\theta = 4k\int_0^{\pi/2}\int_0^R r\,\frac{z^2}{2}\Big|_0^h dr\,d\theta =$$

$$\left(\int_0^{2\pi} = 4\int_0^{\pi/2}\right) \qquad = \dots = \frac{kh^2R^2\pi}{2}$$

Άσκηση (16 από σημ. σελίδας [illegible]).

ΚΜ του ομογενούς σφαιρικού τομέα που ορίζεται από $x^2+y^2+z^2=a^2$ και τα επίπεδα που διέρχ. από τον z-άξονα και σχηματίζουν γωνίες με τον x-άξονα τις φ και $\varphi'=-\varphi$, $x\geq 0$

Απάντηση.



Αυτό θέλουμε να βρούμε

Λόγω συμμετρίας $\bar{y}=\bar{z}=0$

$$\bar{x}=\frac{\iiint_R x\rho\,dV}{\iiint_R \rho\,dV}=\delta$$

$$\bar{x}=\frac{\iiint_R x\,dV}{\iiint_R dV}$$

$x=r\cos\theta\sin\varphi$

$J=r^2\sin\varphi$

Άρα: $m=\iiint_R dV=\iiint_R r^2\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi=\int_0^a\int_{-\varphi}^{\varphi}\int_0^{\pi} r^2\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta\,dr$

$$=\int_0^a r\int_{-\varphi}^{\varphi}\underbrace{\int_0^{\pi} r^2\sin\varphi\,d\varphi}_{=2}\,d\theta\,dr$$

Άρα: $\bar{x}=\dfrac{\int_0^a\int_{-\varphi}^{\varphi}\int_0^{\pi} r^3\sin^2\varphi\cos\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr}{\int_0^a\int_{-\varphi}^{\varphi}\int_0^{\pi} r^2\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta\,dr}=\dfrac{3\pi}{16}a\,\dfrac{\sin(-\varphi)}{-\varphi}$

Άρα: $\bar{r}_s=\dfrac{3\pi a}{16}\,\dfrac{\sin(-\varphi)}{-\varphi}\,\hat{i}+0\,\hat{j}+0\,\hat{k}$